ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ NGỌC TÚ

DÃY FAREY VÀ ÁP DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ NGỌC TÚ

DÃY FAREY VÀ ÁP DỤNG

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
PGS.TS ĐÀM VĂN NHỈ

Thái Nguyên - Năm 2015

Lời cảm ơn

Để hoàn thành được luận văn một cách hoàn chỉnh, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ nhiệt tình của PGS.TS Đàm Văn Nhỉ (Trường Đại học Sư Phạm Hà Nội). Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy và xin gửi lời tri ân nhất của tôi đối với những điều thầy đã dành cho tôi.

Tôi xin chân thành cảm ơn ban lãnh đạo phòng sau Đại học, quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học K7C (2014- 2016) Trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới gia đình, bạn bè, những người đã luôn động viên, hỗ trợ và tạo mọi điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn. Xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 11 năm 2015

Người viết luận văn

Vũ Ngọc Tú

Mục lục

Lời cảm ơn **1**

Mục lục **2**

Mở đầu **1**

1 Dãy Farey **3**

1.1 Các tính chất của dãy Farey 3

1.1.1 Một số kiến thức chuẩn bị 3

1.1.2 Dãy Farey 5

1.1.3 Tính chất của dãy Farey 7

1.2 Độ dài của dãy Farey 11

1.3 Xấp xỉ số vô tỉ qua dãy Farey 13

1.3.1 Xấp xỉ tốt 13

1.3.2 Mô tả hình học của phép xấp xỉ vô tỉ dựa vào dãy phân số Farey 16

1.4 Đường tròn Ford 19

1.5 Từ đại số đến hình học và ngược lại 26

2 Áp dụng **29**

2.1 Hàm Zeta 29

2.2 Áp dụng của dãy phân số Farey 30

2.2.1 Dãy phân số Farey và các giả thuyết 32

2.2.2 Chứng minh chiều xuôi mệnh đề tương đương 33

2.2.3 Chứng minh chiều ngược lại 35

2.3 Một số ví dụ khác về áp dụng của dãy phân số Farey 41

Kết luận **45**

Tài liệu tham khảo **46**

Mở đầu

Số học là một trong những lĩnh vực cổ xưa nhất của toán học và cũng là những lĩnh vực tồn tại nhiều nhất những bài toán, những giả thuyết chưa có câu trả lời. Trên con đường tìm kiếm lời giải cho những giả thuyết đó, nhiều lý thuyết lớn của toán học đã nảy sinh.

Nếu như trước đây số học vẫn được xem là một trong những ngành lý thuyết xa rời thực tiễn nhất thì ngày nay nhiều thành tựu mới nhất của số học có ứng dụng trực tiếp vào các vấn đề của đời sống như thông tin, mật mã, kĩ thuật máy tính. Trong số học có những con số đặc biệt ngoài những tính chất đẹp đẽ kì diệu của nó những con số này còn có những ứng dụng bất ngờ và sâu sắc trong toán học và các lĩnh vực khác.

Dãy Farey được đặt theo tên của nhà địa lý học John Farey, ông mô tả dãy phân số Farey vào năm 1816. Trong bài viết của Farey đưa ra câu hỏi sau: Có bao nhiêu số các phân số tối giản có giá trị khác nhau trong khoảng (0,1)?.

Với mong muốn tìm hiểu vấn đề dãy Farey chúng tôi chọn đề tài **"Dãy Farey và áp dụng"**. Mục đích chính của luận văn là trình bày lại một số kết quả được công bố của Farey và các ứng dụng với các lí thuyết khác. Luận văn gồm có 2 chương

Chương 1: Trong chương này chúng tôi trình bày lại về dãy Farey, như các tính chất, độ dài, xấp xỉ các số qua dãy Farey, mối quan hệ giữa dãy phân số Farey và đường tròn Ford.

Chương 2: Đưa ra các áp dụng của dãy Farey vào các lý thuyết khác.

Mặc dù đã cố gắng rất nhiều nhưng trong luận văn này không thể tránh khỏi những thiếu sót. Tôi rất mong có được những ý kiến đóng góp của các thầy cô và các bạn.

Thái Nguyên, tháng 11 năm 2015

Tác giả

Vũ Ngọc Tú

Chương 1

Dãy Farey

1.1 Các tính chất của dãy Farey

1.1.1 Một số kiến thức chuẩn bị

Định nghĩa 1.1.1. Một hàm số f xác định trên $\mathbb{N}^+$ và nhận các giá trị trong trường số thực $\mathbb{R}$ được gọi là *hàm số học*. Nói một cách khác, một hàm số học là một ánh xạ $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.1.2. Cho $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ là một hàm số học. Hàm f được gọi là một *hàm nhân* nếu $f \neq 0$ (nghĩa là tồn tại ít nhất một số $n \in \mathbb{N}^+$ để $f(n) \neq 0$) và nếu với mọi $a, b \in \mathbb{N}^+$ thỏa mãn $(a, b) = 1$ thì $f(ab) = f(a).f(b)$.)

Ví dụ 1. Hàm số học $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(a) = a^m, m \in \mathbb{Z}$ là một hàm nhân.

Định lí 1.1.3. *(Công thức tổng trải) Nếu số nguyên dương n có phân tích tiêu chuẩn $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_s^{\alpha_s}$ thì với mọi hàm nhân f ta có*

$$\sum_{d|n} f(d) = \prod_{i=1}^{s} \left(1 + \sum_{j=1}^{\alpha_j} f(p_i^j) \right).$$

Chứng minh. Khai triển tích ở vế phải của hệ thức trên ta có:

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{s}\left(1+\sum_{j=1}^{\alpha_j} f(p_i^j)\right)\\
&=\sum f(p_1^{\lambda_1})f(p_2^{\lambda_2})\cdots f(p_s^{\lambda_s}), \text{trong đó } 0\le\lambda_i\le\alpha_i, i=1,...,s,\\
&=\sum f(p_1^{\lambda_1}p_2^{\lambda_2}\cdots p_s^{\lambda_s}),\ \text{vì } f \text{ là hàm nhân},\\
&=\sum_{d|n} f(d), d=p_1^{\lambda_1}p_2^{\lambda_2}\cdots p_s^{\lambda_s}.
\end{aligned}$$

Định lý được chứng minh. □

Định nghĩa 1.1.4. Hàm số học $\phi:\mathbb{N}^+\to\mathbb{R}, n\mapsto\varphi(n)$, trong đó $\phi(n)$ là các số nguyên m thỏa mãn:

$$\begin{cases} 0<m\le n\\ (m,n)=1\end{cases}$$

được gọi là *hàm Euler.*

Bổ đề 1.1.5. *Hàm Euler ϕ là một hàm nhân.*

Chứng minh. Rõ ràng $\phi(1)=1$. Nếu $m=1$ hoặc $n=1$ thì hiển nhiên ta có $\phi(mn)=\phi(m)\phi(n)$. Nếu $m,n>1$ và $(m,n)=1$, ta viết tất cả các số từ 1 đến mn theo bảng sau:

1	2	3	$\cdots$	n
$n+1$	$n+2$	$n+3$	$\cdots$	2n
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$(m-1)n+1$	$(m-1)n+2$	$(m-1)n+3$	$\cdots$	$(m-1)n+n$

Ta thấy các số nguyên tố với n là tất cả các số nằm ở cột $i\in\{1,2,...,n\}$ sao cho $(i,n)=1$. Mỗi cột là một hệ thặng dư đầy đủ theo $modulo(m)$ nên trong mỗi cột có đúng $\phi(m)$ số nguyên tố với m. Do đó các số nguyên tố với cả m và n là $\phi(m)\phi(n)$.

Mặt khác ta lại có $\phi(mn)$ là các số tự nhiên k mà $1 \neq k \neq mn$ sao cho $(k, mn) = 1$. Nhưng $(k, mn) = 1$ nếu và chỉ nếu $(k, m) = (k, n) = 1$. Do đó $\phi(mn)$ chính là các số nguyên dương không vượt quá mn nguyên tố đồng thời với cả m và n. Điều này chứng tỏ rằng $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$. $\square$

Ví dụ 2. Ta có $36 = 2^2.3^2$, khi đó: $\phi(36) = 36.(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) = 12$.

Do đó có 12 phân số duy nhất với mẫu số 36.

Hàm Euler đã được sử dụng để trả lời cho câu hỏi có bao nhiêu phân số $\frac{a}{b}$ tối giản nằm giữa 0 và 1 với b bất kì, $a < b, (a, b) = 1$. Một dãy các phân số tối giản như vậy được gọi là dãy Farey.

1.1.2 Dãy Farey

Định nghĩa 1.1.6. Tập hợp các phân số tối giản $\frac{a}{b}$ thỏa mãn $0 \leq a < b \leq n, (a, b) = 1, b \neq 0$ và sắp xếp theo thứ tự tăng dần được gọi là *dãy phân số Farey cấp n*, kí hiệu là F_n.

Các số $0, 1$ gọi là các phần tử cơ sở của mọi tập hợp phân số Farey và viết được dưới dạng $\frac{0}{1}$ và $\frac{1}{1}$.

Ví dụ 3. $F_1 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\}$
$F_2 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\}$
$F_3 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\}$
$F_4 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\}$

Ta cũng có thể biểu diễn dãy phân số Farey như sau: